Réponses aux exercices supplémentaires de l'intra 2
STT1700 (Automne 2011)

1. Soit X le nombre de fois où le magicien devine correctement le résultat du dé parmi les 12 lancers. Alors $X \sim B(12, p)$, où p = prob. de deviner correctement le résultat du dé pour quelqu'un qui n'a pas de pouvoirs extra-sensoriels = 1/6..
$P\left(X \geq 10\right) = 0.000000786.$ Il est donc très très improbable d'avoir autant de succès pour quelqu'un qui n'a pas de pouvoirs. On conclut donc que le magicien a un pouvoir (ou un truc!).

2. Soit X le nombre de réponses correctes parmi les 2o questions. Alors $X \sim B(20, p)$, où p = prob. de deviner la bonne réponse pour quelqu'un qui n'a pas lu le texte et qui répond donc au hasard = 1/5.
$P\left(X \geq 8\right) = 0.0321.$ Il est donc improbable d'avoir autant de bonnes réponses pour quelqu'un qui répond au hasard. On conclut que le test ne mesure pas l'aptitude à lire puisque quelqu'un qui n'a pas lu le texte peut avoir un certain succès en répondant au test.

3. a) 0.4991; b) 0.3085; c) 0.3829; d) 0.9973; e) 0.2417; f) 0.6171.

4. a) 43.25; b) 41.54; c) 38.75; d) 13.29; e) 14.13; f) 8.55.

5. Soit X la taille d'un homme tiré au hasard de la population. On a $X \sim N(70,100)$. Soit L la longueur du matelas recherchée. On veut L tel que $P\left(X < L\right) = 0.99.$ On trouve L = 93.26 pouces.

6. Soit X la quantité de petits pois mise par la machine dans une boite. On a $X \sim N(\mu,16)$. On cherche μ tel que $P\left(X < 300\right) = 0.01$. On trouve $\mu = 309.32g$.

7. a) 0.6772; b) 0.7554; c) 0.3446.

8. Soit X le QI d'une personne tirée au hasard de la population. On a $X \sim N(100,100)$. Si $\bar{X}$ est la moyenne de 10 personnes tirées au hasard, alors $\bar{X} \sim N(100,10)$. On calcule $P\left(\bar{X} \geq 110\right) = 0.0008$. Si $\mu = 100$, il est très improbable de tomber sur un échantillon ont la moyenne est aussi élevée que 110. On rejette donc l'hypothèse que $\mu = 100$, et on conclut que μ est fort probablement supérieure à 100.

9. Soit X la production de céréales d'un lot sans engrais. On a $X \sim N(6,1)$.
Soit Y la production de céréales d'un lot avec engrais. On a $Y \sim N(6.3,1)$.
Soit $\bar{X}$ est la moyenne de la production des lots sans engrais, alors $\bar{X} \sim N(6,1/6)$. Soit $\bar{Y}$ est la moyenne de la production des lots sans engrais, alors $\bar{Y} \sim N(6.3,1/4)$.

On a $\bar{X} - \bar{Y} \sim N(-0.3, 1/6 + 1/4)$. On veut $P\left(\bar{X} \geq \bar{Y}\right) = P\left(\bar{X} - \bar{Y} \geq 0\right) = 0.32$.

10. Soit X_1 le QI d'une personne tirée au hasard de la première population. On a $X_1 \sim N(\mu_1, 100)$. De plus, $\bar{X}_1 \sim N(\mu_1, 10)$.
Soit X_2 le QI d'une personne tirée au hasard de la deuxième population. On a $X_2 \sim N(\mu_2, 121)$. De plus, $\bar{X}_2 \sim N(\mu_2, 121/15)$.
a) Si $\mu_1 = \mu_2$, $\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \sim N(0, 10 + 121/15)$.
b) $P\left(\bar{X}_1 - \bar{X}_2 \geq 20\right) = 0.000002$. Si les moyennes des deux populations sont égales, alors il est très improbable de tomber sur des échantillons qui présenteront une différence aussi élevée que 20. On conclut que les moyennes ne sont pas égales et que $\mu_2 < \mu_1$.

11. Soit X_i le poids de la i eme personne qui s'entasse dans l'ascenseur, $i = 1, \ldots, 14$. On a $E\left(X_i\right) = 64; V\left(X_i\right) = 144$.
Soit $T = \sum_{i=1}^{14} X_i$ le poids total des 14 personnes qui s'entassent dans l'ascenseur. Par le TLC, on $T \sim N(896, 2016)$. Remarquez qu'on utilise le TLC bien que $n = 14 < 30$. On trouve que $P\left(T \geq 1000\right) = 0.0103$.

12. Soit $X \sim N(200, 900)$. Alors $\bar{X} \sim N(200, 900/25)$.
a) Il faut calculer $P\left(\bar{X} - \mu \geq 4\right) = P\left(\bar{X} \geq 204\right)$.
b) Il faut calculer $P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \geq 10\right) = 1 - P\left(190 \leq \bar{X} \leq 210\right)$.
c) Il faut calculer $P\left(\frac{\left|\bar{X} - \mu\right|}{\mu} \geq 0.01\right) = 1 - P\left(198 \leq \bar{X} \leq 202\right)$.
d) On cherche *n* tel que $P\left(198 \leq \bar{X} \leq 202\right) = 0.95$. On trouve *n* = 865.

13. Soit $X \sim N(\mu, 324)$. Alors $\bar{X} \sim N(\mu, 324/30)$.
a) Il faut calculer $P\left(\bar{X} - \mu \geq 6\right) = P\left(\bar{X} \geq 6 + \mu\right) = 0.0336$.
b) Il faut calculer $P\left(\left|\bar{X} - \mu\right| \geq 6\right) = P\left(\mu - 6 \leq \bar{X} \leq \mu + 6\right) = 0.0672$.
c) On cherche *n* tel que $P\left(\mu - 6 \leq \bar{X} \leq \mu + 6\right) = 0.95$. On trouve *n* = 35.

14. Soit X le nombre de pièces défectueuses parmi les 120 pièces inspectées. Alors $X \sim B(120, p)$, où p = prob. de tomber sur une pièce défectueuse. Par le TLC, on a $X \sim N\left(120p, 120p(1-p)\right)$.
a) $P\left(X \geq 12 \mid p = 0.05\right) = 0.006$.

b) $P\left(X \geq 12 \mid p=0.04\right)=0.0004.$

c) Si $p=0.05,$ alors $P\left(X \geq 14 \mid p=0.05\right)=0.0004.$ Autrement dit, si le lot est acceptable (i.e., $p=0.05$), il est très improbable de tomber sur un échantillon de 120 pièces contenant autant de pièces défectueuses. On conclut que lot est for t probablement inacceptable.

d) On cherche C tel que $P\left(X \geq C \mid p=0.05\right)=0.005.$ On trouve C = 12.15 = 13.

15. On a $\bar{X} \sim N(\mu, 144/16).$

a) On cherche C tel que $P\left(\bar{X} \geq C \mid \mu=50\right)=0.05.$ On trouve C = 54.935.

b) 0.0951; 0.5086; 0.9543; 1.

16. Soit X le nombre de gauchers qui entrent dans l'amphithéâtre parmi les 250 étudiants. Alors $X \sim B(250, p),$ où p = prob. d'être gaucher = 0.2. Par le TLC, on a $X \sim N(50, 40),$ $P\left(X \geq 61\right)=0.0427.$

17. a) $\approx 0.09;$ b) $\approx 0.20;$ c) $\approx 0.27;$

18. On a $X \sim N\left(\mu; 9\sigma^2\right)$. Donc la réponse est : χ_1^2.

22. Ici, il faut utiliser que la loi de Student est symétrique et de moyenne 0. La façon de procéder est similaire à celle que vous utiliseriez pour une norme de moyenne 0 et de variance 1.

a) 2,08586; b) -1.32534; c)2.52798; d) 1.72472; e) 2.08596; f) 2.84534;

23. Intervalle de confiance pour p : $\frac{28}{120} \pm 1.96\sqrt{\frac{\left(\frac{28}{120}\right)\left(1-\frac{28}{120}\right)}{120}}.$

24. $P\left[\hat{p}-\ 1,88\hat{\sigma}_{\hat{p}} \leq p \leq \hat{p}+\ 2,05\hat{\sigma}_{\hat{p}}\right]=P\left[-2,05 \leq \underbrace{\frac{\hat{p}-p}{\hat{\sigma}_{\hat{p}}}}_{N(0,1)} \leq 1,88\right]=0.95.$

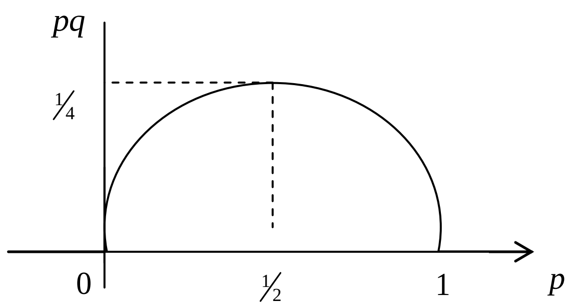
25. On cherche *n* tel que

$$P\left[|\hat{p}-p|\le 0{,}01\right]\ge 0.95 \Leftrightarrow P\left[p-0{,}01\le \hat{p}\le p+0{,}01\right]\ge 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{p-0{,}01-p}{\sigma_{\hat{p}}}\le \underbrace{\frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}}}_{N(0,1)}\le \frac{p+0{,}01-p}{\sigma_{\hat{p}}}\right]\ge 0.95$$

$$\Leftrightarrow P\left[\frac{-0{,}01}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\le \underbrace{\frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}}}_{N(0,1)}\le \frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{pq}{n}}}\right]\ge 0.95.$$

Mais si *p* est au maximum 15%, alors *pq* est maximum lorsque *p* est égal à 15% (voir figure ci-dessous.



On posera donc dans l’équation ci-dessus p = 15%, ce qui nous garantira la plus grande taille d’échantillon possible *n*. Donc, on cherche *n* tel que

$$P\left[\frac{-0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}15\times 0.85}{n}}}\le \underbrace{\frac{\hat{p}-p}{\sigma_{\hat{p}}}}_{N(0,1)}\le \frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}15\times 0.85}{n}}}\right]\ge 0.95.$$

Autrement dit, il faut résoudre pour *n* l’équation suivante :

$$\frac{0{,}01}{\sqrt{\frac{0{,}15\times 0.85}{n}}}=1.96$$

27. a) $X_i \sim N(\mu;\sigma^2) \Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim N(0;1) \Rightarrow \frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_1^2$ (par le théorème 4.6 p. 156).

Donc, $\sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$ (par le théorème 4,7 p. 156). On a donc montré que $n\hat{\sigma}^2/\sigma^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2 \sim \chi_n^2$.

$$\Rightarrow E\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = n \quad \text{(p.155)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n}{\sigma^2}E(\hat{\sigma}^2) = n$$

$$\Leftrightarrow E(\hat{\sigma}^2) = \sigma^2$$

b)

$$V\left(\frac{n\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}\right) = 2n \quad \text{(p.155)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{n^2}{\sigma^4}V(\hat{\sigma}^2) = 2n$$

$$\Leftrightarrow V(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{n}.$$

c) D'abord, on a $\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n}\frac{(X_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi_n^2$. (pour les mêmes raison qu'en (a)).

$$E\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = n \quad \Leftrightarrow \frac{(n-1)}{\sigma^2}E(S^2) = n \Leftrightarrow E(S^2) = \frac{n}{n-1}\sigma^2$$

$$V\left(\frac{(n-1)S^2}{\sigma^2}\right) = 2n \quad \Leftrightarrow \frac{(n-1)^2}{\sigma^4}V(S^2) = 2n \Leftrightarrow V(S^2) = \frac{2n}{(n-1)^2}\sigma^4$$

d) Le meilleur estimateur est $\hat{\sigma}^2$ car il n'est pas biaisé est sa variance est plus petite que celle de S^2.